线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性映射

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

线性映射组成的线性空间与对偶空间 *

性质

设 V 和 W 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 从 V 到 W 上的全体线性映射组成的集合, 记为 $\mathrm{Hom}(V, W)$, 在线性映射的加法和数乘下构成 $\mathbb{F}$-线性空间.

考虑 $W = \mathbb{F}$ 的情形.
称从 V 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射为 V 上的线性函数. 记

$$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{F}) = \{f \colon V \to \mathbb{F} \mid f\text{为线性函数}\}.$$

性质

在线性函数加法和数乘下, V^* 构成 $\mathbb{F}$-线性空间. 称之为 V 的对偶空间.

性质 (对偶基)

若 $e_1, \cdots, e_n$ 为 V 的一组基, 则 V^* 存在唯一的一组基 $f_1, \cdots, f_n$ 满足

$$f_j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若} i = j; \\ 0, & \text{若} i \neq j \end{cases}.$$

称 $f_1, \cdots, f_n$ 为 $e_1, \cdots, e_n$ 的对偶基.

线性映射在不同基下的矩阵与相抵关系 *

设 $\mathscr{A}$ 为从 n 维 $\mathbb{F}$-向量空间 V 到 m 维 $\mathbb{F}$-向量空间的一个线性映射. 设线性映射 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 下的矩阵为 A. 即

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \cdots, \beta_m)A.$$

设线性映射 $\mathscr{A}$ 在另外两组基 $\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$ 和 $\beta_1', \cdots, \beta_m'$ 下的矩阵为 B. 即

$$\mathscr{A}(\alpha_1', \cdots, \alpha_n') = (\beta_1', \cdots, \beta_m')B.$$

定理

记从线性空间 V 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\alpha_1', \cdots, \alpha_n'$ 的过渡矩阵为 Q, 以及从线性空间 W 的基 $\beta_1, \cdots, \beta_m$ 到基 $\beta_1', \cdots, \beta_m'$ 的过渡矩阵为 P. 则

$$B = P^{-1}AQ.$$

推论

线性映射在不同基下的矩阵之间相抵.

注: 反之亦然. 即, 相抵的矩阵是同一个线性映射在不同基下的矩阵.

定理

设线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在两组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵为 A 和 B. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 到 $\beta_1, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 T. 则

$$B = T^{-1}AT.$$

定义 (相似)

设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 为两个 n 阶方阵. 若存在可逆阵 $T \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $B = T^{-1}AT$, 则称 A 与 B相似. 记为 $A \sim B$. 相似为等价关系.

定理

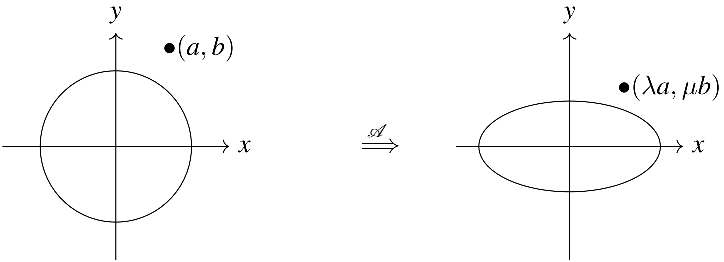
一个线性变换在不同基下矩阵相似. 反之任意属于该相似类的矩阵, 均为该线性变换在某组基下的矩阵.

类比于相抵关系, 对相似关系我们有如下基本问题:

1. 两个矩阵相似充要条件
2. 相似等价类中的最简代表元

伸缩变换与特征向量

设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\binom{1}{0},\binom{0}{1}$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$.



问题:

1. 是否任意线性变换都由某组基下的各个方向伸缩给出?(答: 错误.)
2. 哪些线性变换可以由某组基下的伸缩给出? 即, 哪些线性变换在合适的基下为对角阵?

为了研究回答这些问题, 我们需要引入特征值和特征向量等概念.

定义 (线性变换的特征值, 特征向量以及特征子空间)

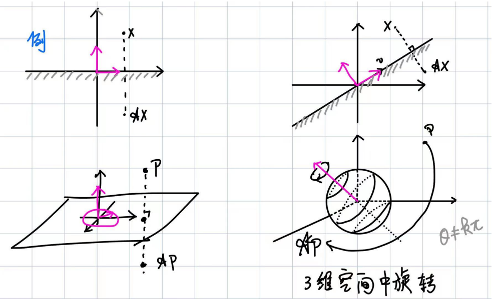
设 $\mathscr{A}$ 为 n 维 $\mathbb{F}$-向量空间 V 上的线性变换. 若存在 $\lambda \in F$ 以及非零向量 $\alpha \in V$, 使得

$$\mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha,$$

则称 λ 为 $\mathscr{A}$ 的一个特征值, 称 α 为属于特征值 λ 的一个特征向量. 称

$$V_{\mathscr{A}}(\lambda) := \ker(\mathscr{A} - \lambda\varepsilon) = \{\alpha \in V \mid \mathscr{A}\alpha = \lambda\alpha\}$$

为属于 λ 的特征子空间.



思路: 通过代数 (矩阵) 来解决几何问题 (特征值, 特征向量).
设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的一组基.

$$\left\{\begin{matrix} V \text{ 上的全体} \\ \text{线性变换} \end{matrix}\right\} \xleftrightarrow[\substack{1:1 \\ \mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A}]{\text{基}\alpha_1,\cdots,\alpha_n} \mathbb{F}^{n\times n}$$

定义 (矩阵的特征值, 特征向量以及特征子空间)

设 A 为 $\mathbb{F}$ 系数的 n 阶方阵. 若存在 $\lambda \in F$ 及非零数组向量 $x \in \mathbb{F}^n$, 使得

$$Ax = \lambda x,$$

则称 λ 为方阵 A 的特征值, 称 x 为属于特征值 λ 的一个特征向量. 称

$$V_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

为属于 λ 的特征子空间.

如何求特征值和特征向量

求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量可以转换为求 A 的特征值和特征向量.

性质

设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 为 $\mathbb{F}$-线性空间 V 的一组基. 设 V 上的线性变换在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 下矩阵为 A. 则

1. $\mathscr{A}$ 与 A 有相同的特征值;
2. 若 λ 为 $\mathscr{A}$ 的特征值, 则 $V_{\mathscr{A}}(\lambda) = \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x \mid x \in V_A(\lambda)\}$.

证明思路: $x \in V_A(\lambda) \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow \mathscr{A}((\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x) = \lambda(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x \Leftrightarrow (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)x \in V_{\mathscr{A}}(\lambda)$.

性质

设 λ 为方阵 A 的特征值. 则

1. $f(\lambda)$ 为 $f(A)$ 的特征值; 特别地, λ^k 为方阵 A^k 的特征值;
2. λ 为方阵 A^T 的特征值;
3. 若 $\lambda \neq 0$, 则 $\frac{1}{\lambda}\det(A)$ 为 A^* 的特征值. 特别地, 若 A 可逆, 则 $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值.
4. 若 A 为实矩阵且 $AA^T = 1$, 则 $|\lambda| = 1$.

注: 实矩阵的特征值不一定还是实数!

例

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解: $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=0\Rightarrow\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}=0\Rightarrow\lambda=2\pm\sqrt{2}.$

解方程组: $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\pm\sqrt{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\pm\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

对于方阵 A 的特征值的计算, 我们有如下一般方法:

$$\begin{aligned}\lambda_0 \text{ 为 } A \text{ 的特征值} &\Leftrightarrow \exists x\neq 0 \quad s.t.\ Ax=\lambda_0 x\\ &\Leftrightarrow \text{线性方程组}(\lambda_0 I_n-A)X=0\text{有非零解}\\ &\Leftrightarrow \det(\lambda_0 I_n-A)=0\end{aligned}$$

即, $\boxed{\lambda_0 \text{ 为 } A \text{ 的特征值当且仅当 } \lambda_0 \text{ 为多项式 } \det(\lambda I_n-A) \text{ 的根.}}$ 称行列式 $\det(\lambda I-A)$ 为 A 的特征多项式. 记为$P_A(\lambda)$.

注:

1. 数域 $\mathbb{F}$ 上的多项式在 $\mathbb{F}$ 上不一定有根!
2. (代数基本定理) 复数域 $\mathbb{C}$ 上的非常值多项式在 $\mathbb{C}$ 上一定有根.

在计算特征值和特征向量时, 总是假设 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$.

矩阵特征值和特征向量一般求解方法

设 A 为 n 阶复矩阵. 求解过程分为如下两步:

1. 求 $P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, 并做分解
$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \cdot \cdots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$$
其中 $\lambda_i \in \mathbb{C}, n_i \geq 1, n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$. 我们称 n_i 为特征值 λ_i 的重数.
2. 给定 $i = 1, \cdots, s$. 解齐次线性方程组 $(\lambda_i I_n - A)X = 0$ 得解空间 $V_A(\lambda_i)$ 或者基础解系.

例

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

答案: $P_A(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$.

- $(0 \cdot I - A)\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
- $(1 \cdot I - A)\vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例

设 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$. 设 $\mathscr{A}$ 为 $V=\mathbb{F}^{2\times 2}$ 上的线性变换满足 $\mathscr{A}(M)=AM$. 求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量.

答案: $\mathscr{A}(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_{\mathscr{A}}(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2.$

- $(I-A)\vec{x}=0\Rightarrow$ 基础解系 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$ 特征子空间 $\langle E_{11},E_{12}\rangle$
- $(2I-A)\vec{x}=0\Rightarrow$ 基础解系 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$ 特征子空间 $\langle E_{11}+E_{21},E_{12}+E_{22}\rangle$.

可以用矩阵来定义线性变换的哪些不变量 (即, 不依赖于基的选取的量).

性质

相似的矩阵具有相同的特征多项式和特征值.

证明: 设 $B = T^{-1}AT$. 则

$$P_B(\lambda) = \det(\lambda I - T^{-1}AT) = \det(T^{-1})\det(\lambda I - A)\det(T) = P_A(\lambda).$$

即, 可以用矩阵来定义线性变换的特征多项式和特征值. 有没有其它相似不变量呢?

定理

设 A 为 n 阶复矩阵的 n 个特征值分别为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(可能有重复的). 则

1. $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$;
2. $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

证明思路: 展开 $P_A(\lambda)$ 并使用根与系数之间的关系.

推论

一个 n 阶方阵可逆当且仅当其 n 个特征值均不为零.